

考前仿真卷

《数学（理工农医类）》

高中起点升本、专科

一、选择题（本大题共 17 小题，每小题 5 分，共 85 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。）

1. 设集合 $M = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$, $N = \{0, 2, 4, 6\}$, 则 $M \cap N =$ ()

A. $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

B. $\{1, 3, 5\}$

C. $\{0, 2, 4\}$

D. \emptyset

2. 直线 $3x + y - 2 = 0$ 经过 ()

C. 第二、三、四象限

D. 第一、三、四象限

3. 设函数 $y = \frac{k}{x}$ 的图像经过点 $(2, -2)$, 则 $k =$ ()

A. -4

B. 4

C. 1

D. -1

4. 若 a, b, c 为实数, 且 $a \neq 0$, 设甲: $b^2 - 4ac \geq 0$, 乙: $ax^2 + bx + c = 0$ 有实数根, 则 ()

A. 甲既不是乙的充分条件, 也不是乙的必要条件

B. 甲是乙的必要条件, 但不是乙的充分条件

C. 甲是乙的充分必要条件

D. 甲是乙的充分条件, 但不是乙的必要条件

5. 下列函数在各自定义域中为增函数的是 ()

A. $y = 1 + 2^x$

B. $y = 1 - x$

C. $y = 1 + x^2$

D. $y = 1 + 2^{-x}$

6. 若 $0 < \lg a < \lg b < 2$, 则 ()

A. $1 < b < a < 100$

B. $0 < a < b < 1$

C. $1 < a < b < 100$

D. $0 < b < a < 1$

7. 二次函数 $y = x^2 + 2x + 2$ 图像的对称轴为 ()

- A. $x = 2$
 B. $x = -2$
 C. $x = 1$
 D. $x = -1$

8. 函数 $f(x) = 1 + \cos x$ 的最小正周期是 ()

- A. $\frac{\pi}{2}$
 B. π
 C. $\frac{3}{2}\pi$
 D. 2π

9. 下列函数中, 为偶函数的是 ()

- A. $y = 3x^2 - 1$
 B. $y = x^3 - 3$
 C. $y = 3^x$
 D. $y = \log_3 x$

10. 如果函数 $y = x + b$ 的图像经过点 $(1, 7)$, 则 $b =$ ()

- A. 5
 B. 1
 C. 4
 D. 6

11. 将 5 本不同的历史书和 2 本不同的数学书排成一行, 则 2 本数学书恰好在两端的概率为 ()

- A. $\frac{1}{20}$
 B. $\frac{1}{10}$
 C. $\frac{1}{21}$
 D. $\frac{1}{14}$

12. 在等腰三角形 ABC 中, A 是顶角, 且 $\cos A = -\frac{1}{2}$, 则 $\cos B =$ ()

- A. $-\frac{1}{2}$
 B. $\frac{\sqrt{3}}{2}$
 C. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

D. $\frac{1}{2}$

13. 若向量 $\mathbf{a} = (1, m)$, $\mathbf{b} = (-2, 4)$, 且 $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = -10$, 则 $m =$ ()

A. -4

B. -2

C. 1

D. 4

14. 抛物线 $y^2 = 3x$ 的准线方程为 ()

A. $x = \frac{1}{2}$

B. $x = -\frac{3}{2}$

C. $x = \frac{3}{4}$

D. $x = -\frac{3}{4}$

15. 不等式 $|x| < 1$ 的解集为 ()

A. $\{x \mid x > 1\}$

B. $\{x \mid x < 1\}$

C. $\{x \mid -1 < x < 1\}$

D. $\{x \mid x < -1\}$

16. 以点 $(0, 1)$ 为圆心且与直线 $\sqrt{3}x - y - 3 = 0$ 相切的圆的方程为 ()

A. $(x - 1)^2 + y^2 = 1$

D. $x^2 + (y - 1)^2 = 16$

17. 从 1, 2, 3, 4, 5 中任取 3 个数, 组成的没有重复数字的三位数共有 ()

A. 40 个

B. 80 个

C. 30 个

D. 60 个

二、填空题 (本大题共 4 小题, 每小题 4 分, 共 16 分.)

18. 计算 $3^{\frac{5}{3}} \times 3^{\frac{1}{3}} - \log_4 10 - \log_4 \frac{8}{5} =$ _____.

19. 曲线 $y = x^3 + 1$ 在点 $(1, 2)$ 处的切线方程是_____.

20. 等比数列 $\{a_n\}$ 中, 若 $a_2 = 8$, 公比为 $\frac{1}{4}$, 则 $a_5 =$ _____.

21. 某运动员射击 10 次, 成绩 (单位: 环) 如下

则该运动员的平均成绩是_____环.

三、解答题(本大题共4小题,共49分.解答应写出推理、演算步骤.)

22. 已知 $\triangle ABC$ 中, $A = 120^\circ$, $AB = AC$, $BC = 4\sqrt{3}$.

(I) 求 $\triangle ABC$ 的面积;

(II) 若M为AC边的中点, 求BM.

23. 已知等差数列 $\{a_n\}$ 的公差 $d \neq 0$, $a_1 = \frac{1}{2}$, 且 a_1, a_2, a_5 成等比数列.

(I) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(II) 若 $\{a_n\}$ 的前n项和 $S_n = 50$, 求n.

24. 已知函数 $f(x) = x^3 + ax^2 + b$, 曲线 $y = f(x)$ 在点(1,1)处的切线为 $y = x$.

(I) 求a, b;

(II) 求 $f(x)$ 的单调区间, 并说明它在各区间的单调性.

25. 设椭圆的焦点为 $F_1(-\sqrt{3}, 0)$, $F_2(\sqrt{3}, 0)$, 其长轴长为4.

(I) 求椭圆的方程;

(II) 设直线 $y = \frac{\sqrt{3}}{2}x + m$ 与椭圆有两个不同的交点, 其中一个交点的坐标是(0, 1), 求另一个交点的坐标.

参考答案及解析

一、单项选择题

1. 【答案】C

【解析】交集即取两个集合中共同的元素, 故 $M \cap N = \{0, 2, 4\}$.

2. 【答案】A

【解析】直线 $3x + y - 2 = 0$ 可整理为 $y = -3x + 2$, 由此可以看出直线过(0, 2)点, 且直线的斜率为-3, 故直线过第一、二、四象限.

3. 【答案】A

【解析】因为函数 $y = \frac{k}{x}$ 的图像经过点(2, -2), 所以, $-2 = \frac{k}{2}$, $k = -4$.

4. 【答案】C

【解析】若 $ax^2 + bx + c = 0$ 有实根, 则 $\Delta = b^2 - 4ac \geq 0$, 反之, 亦成立, 故甲是乙的充分必要条件.

5. 【答案】A

【解析】由指数函数图像的性质可知, A项是增函数.

6. 【答案】C

【解析】 $\lg x$ 函数为单调递增函数, $0 = \lg 1 < \lg a < \lg b < \lg 100 = 2$, 则 $1 < a < b < 100$.

7. 【答案】 D

【解析】 $y = x^2 + 2x + 2$ 可变形为 $y = (x+1)^2 + 1$, 由二次函数的性质可知, 其对称轴为 $x = -1$.

8. 【答案】 D

【解析】 易知 $\cos x$ 的最小正周期为 2π , 故 $y = 1 + \cos x$ 的最小正周期为 2π .

9. 【答案】 A

【解析】 B, C, D 项均为非奇非偶函数, 只有 A 项为偶函数.

10. 【答案】 D

【解析】 函数 $y = x + b$ 过点 $(1, 7)$, 故 $1 + b = 7 \Rightarrow b = 6$.

11. 【答案】 C

【解析】 2 本数学书恰好在两端的概率为 $\frac{P_2^2 \cdot P_3^2}{P_7^2} = \frac{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 \times 2 \times 1}{7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1} = \frac{1}{21}$.

12. 【答案】 B

【解析】 因为 $\triangle ABC$ 为等腰三角形, A 为顶角, $\cos A = 1 - 2\sin^2 \frac{A}{2} = -\frac{1}{2}$, 所以 $\sin \frac{A}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

$$\cos B = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{A}{2}\right) = \sin \frac{A}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

13. 【答案】 B

【解析】 $a \cdot b = 1 \times (-2) + m \times 4 = -10 \Rightarrow m = -2$.

14. 【答案】 D

【解析】 因为 $y^2 = 3x$, $p = \frac{3}{2} > 0$, 所以抛物线 $y^2 = 3x$ 的准线方程为 $x = -\frac{p}{2} = -\frac{3}{4}$.

15. 【答案】 C

【解析】 $|x| < 1 \Rightarrow -1 < x < 1$, 故不等式 $|x| < 1$ 的解集为 $\{x | -1 < x < 1\}$.

16. 【答案】 C

【解析】 由题意知, $R = \frac{|0 - 1 - 3|}{\sqrt{(\sqrt{3})^2 + (-1)^2}} = 2$, 则圆的方程为 $x^2 + (y - 1)^2 = 4$.

17. 【答案】 D

【解析】 此题与顺序有关, 所组成的没有重复数字的三位数共有 $P_5^3 = 5 \times 4 \times 3 = 60$ (个).

二、填空题

18. 【答案】 7

【解析】 $3^{\frac{5}{2}} \times 3^{\frac{1}{2}} - \log_4 10 - \log_4 \frac{8}{5} = 3^2 - \left(\log_4 10 + \log_4 \frac{8}{5}\right) = 9 - \log_4 16 = 9 - 2 = 7$.

19. 【答案】 $3x - y - 1 = 0$

【解析】 $y' = 3x^2$, $y'|_{x=1} = 3$, 故曲线在点 $(1, 2)$ 处的切线方程为 $3(x - 1) = y - 2$,

即 $3x - y - 1 = 0$.

20. 【答案】 $\frac{1}{8}$

【解析】 $a_5 = a_2 q^{5-2} = 8 \times \left(\frac{1}{4}\right)^3 = \frac{1}{8}$.

21. 【答案】 8.7

【解析】 $\bar{x} = \frac{8+10+9+9+10+8+9+9+8+7}{10} = 8.7$.

三、解答题

22. 【答案】

在 $\triangle ABC$ 中, 作 BC 边的高 AD . 由已知可得 $AD=2, AB=AC=4$.

(I) $\triangle ABC$ 的面积 $S = \frac{1}{2} BC \cdot AD = 4\sqrt{3}$.

(II) 在 $\triangle ABM$ 中, $AM=2$. 由余弦定理得 $BM^2 = AB^2 + AM^2 - 2AB \cdot AM \cdot \cos A$
 $= 16 + 4 - 2 \times 4 \times 2 \times \left(-\frac{1}{2}\right)$
 $= 28$.

所以 $BM = 2\sqrt{7}$.

【解析】

23. 【答案】

(I) $a_2 = \frac{1}{2} + d, a_3 = \frac{1}{2} + 4d$.

由已知得 $\left(\frac{1}{2} + d\right)^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} + 4d\right)$.

解得 $d=0$ (舍去), 或 $d=1$.

所以 $\{a_n\}$ 的通项公式为

$a_n = \frac{1}{2} + (n-1) \times 1 = n - \frac{1}{2}$.

(II) $S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n) = \frac{n^2}{2}$. 由已知得 $\frac{n^2}{2} = 50$.

解得 $n = -10$ (舍去), 或 $n = 10$.

所以 $n = 10$.

【解析】

24. 【答案】

(I) $f'(x) = 3x^2 + 2ax$.

由 $f'(1) = 1$ 得 $3 + 2a = 1$, 所以 $a = -1$.

又点 $(1, 1)$ 在曲线上, 得 $1 + a + b = 1$.

所以 $b = 1$.

(II) $f'(x) = 3x^2 - 2x$.

令 $f'(x) = 0$, 解得 $x = 0$ 或 $x = \frac{2}{3}$.

当 $x > \frac{2}{3}$ 或 $x < 0$ 时, $f'(x) > 0$;

当 $0 < x < \frac{2}{3}$ 时, $f'(x) < 0$.

$f(x)$ 的单调区间为 $(-\infty, 0)$, $(0, \frac{2}{3})$ 和

$(\frac{2}{3}, +\infty)$.

$f(x)$ 在区间 $(-\infty, 0)$ 和 $(\frac{2}{3}, +\infty)$ 上为增

函数, 在区间 $(0, \frac{2}{3})$ 上为减函数.

【解析】

25. 【答案】

(I) 由已知, 椭圆的长轴长 $2a = 4$, 焦距 $2c =$

$2\sqrt{3}$, 设其短半轴长为 b , 则

$b = \sqrt{a^2 - c^2} = \sqrt{4 - 3} = 1$.

所以椭圆的方程为 $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$.

(II) 因为直线与椭圆的一个交点为 $(0, 1)$, 将该交点坐标代入直线方程可得 $m = 1$, 即

$$y = \frac{\sqrt{3}}{2}x + 1.$$

将直线与椭圆的方程联立得

$$\begin{cases} y = \frac{\sqrt{3}}{2}x + 1, \\ \frac{x^2}{4} + y^2 = 1. \end{cases}$$

解得另一交点坐标为 $(-\sqrt{3}, -\frac{1}{2})$.

【解析】